Φύλλο εργασίας

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου – §11. Κανονικά πολύγωνα

(συνοδεύεται από σχέδια στη σελίδα users.sch.gr/ppetridis/tpe/kp)

Επιμέλεια: Πετρίδης Παντελής

1 Γενικά

🖳 Από το μενού επιλέξτε το σχέδιο «Γενικά» και γνωρίστε το κανονικό πολύγωνο. Αλλάξτε την τιμή του ν (το ν είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου). Εμφανίστε τα στοιχεία του από τις επιλογές που δίνονται. Το εικονίδιο στην επάνω δεξιά γωνία, επαναφέρει το σχέδιο στην αρχική του μορφή.

> Οι πλευρές του κανονικού πολυγώνου συμβολίζονται με λ και οι γωνίες του με φ.
> Ορισμένα στοιχεία του κανονικού πολυγώνου όπως π.χ. η πλευρά του και η γωνία του, έχουν ως δείκτη το πλήθος των πλευρών του. Έτσι, π.χ. στο κανονικό επτάγωνο, οι πλευρές του συμβολίζονται με $λ_7$ και οι γωνίες του με $φ_7$.
> Όταν αναφερόμαστε σε ένα ν-γωνο, εννοούμε ένα πολύγωνο με ν πλευρές (άρα και ν γωνίες). Από εκεί προκύπτει ο γενικός συμβολισμός των πλευρών $λ_ν$ ή των γωνιών $φ_ν$.

Ερωτήσεις:

1. Αν ένα πολύγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες, τότε έχει και όλες τις γωνίες του ίσες; [🖳 Από το μενού επιλέξτε το σχέδιο «Πολύγωνα με ίσες πλευρές»] ______________(1)
2. Πώς (αλλιώς) λέγεται ένα κανονικό τρίγωνο; ______________(2)
3. Πώς (αλλιώς) λέγεται ένα κανονικό τετράπλευρο; ______________(3)

2 Γωνία κανονικού ν-γώνου

🖳 Από το σχέδιο «Γενικά» τσεκάρετε την επιλογή «Γωνία $φ_ν$».

> Εμφανίζεται ενδεικτικά μία γωνία του πολυγώνου.

- □ Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου; ______________(1α)
  Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ενός κανονικού τριγώνου; ______________(1β)
- □ Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου; ______________(2α)
  Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ενός κανονικού τετραπλεύρου; ______________(2β)
- □ Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου; ______________(3α)
  Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ενός κανονικού πενταγώνου; ______________(3β)
- □ Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου; [📖§4.8-σ.85] ______________(4α)
  Πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία ενός κανονικού ν-γώνου; ______________(4β)

Τελικά, ισχύει ο τύπος $\boxed{φ_ν = \qquad}$(5).

> Ασκήσεις:
> 1. Να βρεθεί η γωνία ενός κανονικού δεκαγώνου.

2. Να βρεθεί το πλήθος ν των πλευρών του κανονικού ν-γώνου που έχει γωνία $φ_ν$=135°.

3. Να βρεθούν τα κανονικά πολύγωνα που η γωνία τους $φ_ν$ είναι οξεία.

3 Κύκλοι

❑ Από το μενού επιλέξτε το σχέδιο «Κύκλοι».

Αρχικά, εμφανίζεται ένα τμήμα ενός κανονικού πολυγώνου ΑΒΓΔ…Τ. Επίσης, εμφανίζεται ένα τμήμα ενός κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του Α, Β, Γ. Δίνονται κάποιες επιλογές στο πάνω μέρος του σχήματος. Το ν καθορίζει το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου, αν και δεν φαίνονται όλες. Η μεταβλητή s χρησιμεύει για το βηματισμό της απόδειξης (αυτό θα γίνει περισσότερο σαφές παρακάτω) και η τιμή της δεν έχει κάποια άλλη σημασία.

□ Έστω ΑΒΓΔ…Τ κανονικό πολύγωνο και C(O,R) ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β, Γ.

Ένας τέτοιος κύκλος πάντα υπάρχει διότι ____(1).

Θέλω να δείξω ότι διέρχεται και από το Δ.

Απόδειξη

Ακολουθήστε τα βήματα που προτείνονται παρακάτω ή κάντε τη δική σας απόδειξη.

[❑ Τσεκάρετε την επιλογή «Ακτίνες-Γωνίες» και ορίστε την τιμή του s, ώστε s=4.]

Τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ είναι ___________(2) του κύκλου, άρα είναι μεταξύ τους ___________(3). Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές διότι _________________________(4), άρα οι γωνίες _____(5α), _____(5β) είναι ίσες.

Τα τρίγωνα ΟΒΑ, ΟΓΔ έχουν

____

____

____(6)

άρα είναι ίσα,

άρα ___________(7) [❑ s=4.3],

άρα ο κύκλος διέρχεται από το Δ [❑ s=4.5].

□ Αποδείξαμε: Ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β, Γ διέρχεται και από το Δ.

Όμοια: [❑ s=5] Ο κύκλος που διέρχεται από τα __(8α), __(8β), __(8γ) διέρχεται και από το __(8δ) [❑ s=5.5].

Γενικά: Ο κύκλος που διέρχεται από τρεις διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου διέρχεται και από την επόμενη.

Συνολικά: Ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β, Γ διέρχεται από όλες τις κορυφές του πολυγώνου [❑ s=6].

Άρα ο κύκλος αυτός είναι ο ________________(9) κύκλος του πολυγώνου.

Συμπέρασμα 1^o:
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο (ή έχει περιγεγραμμένο κύκλο).

□ Σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ, …, ΟΤΑ είναι ίσα, άρα και τα ύψη τους είναι ίσα (💻 Επιλογή «Ύψη» - πρέπει το s να είναι 6).
Άρα, ο κύκλος με κέντρο -πάλι- το Ο και ακτίνα τα ύψη αυτά, θα διέρχεται από όλα τα ________________________(10). Κι επειδή οι ακτίνες του είναι ___________(11) στις πλευρές του πολυγώνου, θα εφάπτεται σε αυτές. Άρα, θα είναι ο _______________(12) κύκλος του πολυγώνου (💻 Επιλογή «Εγγ. κύκλος»).

Συμπέρασμα 2^o:
____(13)

Τελικό συμπέρασμα:
____
____(14)

4 Στοιχεία

Σκοπός της παραγράφου είναι να γίνουν γνωστά τα **στοιχεία** ενός κανονικού πολυγώνου, οι **συμβολισμοί** τους και οι **ορισμοί** τους.

> Κάποια από αυτά είναι στοιχεία και κάθε τυχαίου πολυγώνου και είναι ήδη γνωστά, γι' αυτό και από αυτά δε ζητούνται οι ορισμοί τους [📄§2.20-σ.28]. Προσέξτε ότι στα κανονικά πολύγωνα υπάρχουν **επιπλέον συμβολισμοί** (π.χ. κάθε πολύγωνο έχει πλευρές, αλλά μόνο στα κανονικά πολύγωνα συμβολίζονται με λ).

Γνωρίστε τα στοιχεία του πολυγώνου με τη σειρά που δίνονται παρακάτω.
Να δώσετε τον ορισμό τους ή να κάνετε τις παρατηρήσεις σας, όπου αυτό ζητείται.
💻 Από το μενού επιλέξτε το σχέδιο «Γενικά». Εμφανίστε κάθε στοιχείο που σας ζητείται από τις αντίστοιχες επιλογές.

> Κάποια στοιχεία είναι μοναδικά (π.χ. ο εγγεγραμμένος κύκλος), ενώ άλλα όχι (π.χ. οι γωνίες $φ_ν$). Για τα τελευταία υπάρχουν οι επιλογές εμφάνισης όλων των στοιχείων αυτών.

□ Κορυφές
□ Πλευρές: $λ_ν$
□ Γωνίες: $φ_ν$
□ Διαγώνιοι
□ Περίμετρος: $P_ν$ (δεν αποδίδεται στο σχήμα)
□ Εμβαδόν: $E_ν$ (δεν αποδίδεται στο σχήμα)

□ Περιγεγραμμένος κύκλος
□ Εγγεγραμμένος κύκλος

□ Κέντρο: O
Ορισμός: Το κέντρο ενός κανονικού πολυγώνου είναι ______________________(1).

□ Ακτίνες: R
Ορισμός: ____(2).
Παρατήρηση: Οι ακτίνες ενός κανονικού πολυγώνου είναι ταυτόχρονα και _______
____(3).

□ Αποστήματα: $α_ν$
Ορισμός: ____(4).
Παρατήρηση: Τα αποστήματα ενός κανονικού πολυγώνου είναι ταυτόχρονα και ___
____(5).

□ Κεντρικές γωνίες: $ω_ν$
Ορισμός: ____(6).

5 **Ιδιότητες** [□ Από το μενού επιλέξτε το σχέδιο «Γενικά»]

□ Το κανονικό ν-γωνο έχει (σε πλήθος) __(1) κεντρικές γωνίες $ω_ν$.
Όλες μαζί έχουν άθροισμα ______°(2).

Άρα, η κάθε μία είναι: $\boxed{ω_ν = \qquad}$ (3).

□ Το κανονικό ν-γωνο έχει ___(4) πλευρές.
Κάθε μία είναι ίση με ___(5).

Άρα, η περίμετρός του είναι: $\boxed{P_ν = \qquad}$ (6).

□ □ Τσεκάρετε τις επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Κέντρο Ο», «Απόστημα $α_ν$», «Μ μέσο ΑΒ», «Τρίγωνο ΟΑΒ».
Το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου μπορεί να χωριστεί σε __(7) τρίγωνα, τα οποία είναι ίσα με το _____(8), άρα κάθε ένα από αυτά έχει εμβαδόν όσο αυτό.
Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ, παίρνουμε τον τύπο ______(9), καθώς η βάση του είναι η __________(10) και το ύψος του το __________(11). Έτσι, το εμβαδόν του είναι __________(12).

Άρα, το εμβαδόν του πολυγώνου είναι: $\boxed{E_ν = \qquad}$ (13).

Σύμφωνα με τον τύπο της περιμέτρου που προέκυψε προηγουμένως,

το εμβαδόν του πολυγώνου, επίσης, είναι: $\boxed{E_ν = \qquad}$ (14).

□ □ Τσεκάρετε τις επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Κέντρο Ο», «Απόστημα $α_ν$», «Μ μέσο ΑΒ», «Τρίγωνο ΟΑΒ».

Το τρίγωνο ΟΜΒ είναι __________(15) με κάθετες πλευρές ίσες με ___(16) και ___(17) και με υποτείνουσα ίση με ___(18). Από την εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ____(19).

Άρα, ισχύει ο τύπος: $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$(20).

□ Τσεκάρετε τις επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Κέντρο Ο», «Τρίγωνο ΟΑΒ».

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής την ___(21) και γωνίες βάσης ίσες με ___(22). Το άθροισμά τους είναι 180°,
άρα ____(23),
άρα οι γωνίες ___(24) και ___(25) είναι ________________(26).

> Η παραπάνω διαπίστωση επιβεβαιώνει κάτι που θα μπορούσε να προκύψει άμεσα, αν προσθέταμε κατά μέλη τους τύπους υπολογισμού των γωνιών ϕ_ν, ω_ν.
> Παρατηρήστε ότι η γωνία ϕ_ν είναι επίσης ____________________(27) με την εξωτερική της. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι ____(28).

> Άσκηση:
> Αν $E_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν-γώνου (ν>4), εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R), να αποδείξετε ότι $E_{2\nu} = \frac{1}{2} P_\nu \cdot R$, όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R [σ.237-Απ.4].
>
> Λύση:
> Στο σχέδιο «Γενικά», τσεκάρετε τις επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Περιγεγραμμένος κύκλος», «Κέντρο Ο», «Απόστημα α_ν», «Μ μέσο ΑΒ», «2ν-γωνο (ακτίνας R)», «τετράπλευρο ΟΑΝΒ».
> Το εμβαδόν του κανονικού 2ν-γώνου μπορεί να χωριστεί σε __(14) τετράπλευρα, τα οποία είναι ίσα με το _____, άρα κάθε ένα από αυτά έχει εμβαδόν όσο αυτό.
> Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τετραπλεύρου αυτού, παίρνουμε τον τύπο __________[§10.3-σ.216-Παρ.], καθώς το τετράπλευρο ______________________.
> Έτσι, το εμβαδόν του είναι ___________.
> Άρα, το εμβαδόν του πολυγώνου είναι ίσο με $E_{2\nu}$ = _____________.
> Αλλά η περίμετρος, σύμφωνα με τύπο που προέκυψε από προηγούμενα είναι ίση με P_ν = ___________, άρα το εμβαδόν του πολυγώνου, είναι: $E_{2\nu}$ = __________.

6 Τύπος του Αρχιμήδη (σχέση ν-γώνου – 2ν-γώνου εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο).

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Παίρνουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του κανονικού ν-γώνου και, ενώνοντας με τις κορυφές του, προκύπτει κανονικό 2ν-γωνο εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Να βρεθεί η πλευρά $\lambda_{2\nu}$ και το απόστημα $\alpha_{2\nu}$ του κανονικού 2ν-γώνου ως συνάρτηση των στοιχείων λ_ν, α_ν και R του κανονικού ν-γώνου.

Λύση:

❑ Στο σχέδιο «Γενικά», τσεκάρετε τις επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Περιγεγραμμένος κύκλος», «Κέντρο Ο», «Απόστημα $α_ν$», «Μ μέσο ΑΒ», «2ν-γωνο (ακτίνας R)», «τετράπλευρο ΟΑΝΒ».

□ Το τμήμα ΟΜ είναι ίσο με ___(1) ενώ το τμήμα ΟΝ ίσο με ___(2). Από τ__ ________(3) των τμημάτων αυτών προκύπτει το μήκος του ΜΝ, το οποίο είναι ίσο με _____(4). Το τρίγωνο ΑΜΝ είναι __________(5) με κάθετες πλευρές ίσες με ___(6) και ___(7) και με υποτείνουσα ίση με ___(8). Από την εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει ____(9).

Άρα, ισχύει ο τύπος: $\boxed{}$(10).

□ Τα στοιχεία $λ_{2ν}$, $α_{2ν}$, R του 2ν-γώνου συνδέονται με τη σχέση ________________(11).

> Η ακτίνα R είναι κοινό στοιχείο των δύο πολυγώνων καθώς τα δύο πολύγωνα είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο. Επίσης, κοινά στοιχεία είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος και το κέντρο.

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή το $λ_{2ν}$ από την προηγούμενη σχέση, προκύπτει ____(12).

Άρα, ισχύει ο τύπος: $\boxed{}$(13).

7 Ομοιότητα κανονικών ν-γώνων.

Θεωρούμε ΑΒΓ…Τ και Α΄Β΄Γ΄…Τ΄ δύο κανονικά ν-γωνα.

> Η παραπάνω διατύπωση δίνει ένα στοιχείο που ίσως δεν γίνεται άμεσα φανερό: Τα δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο πλήθος πλευρών ν.

□ Θέλουμε να δείξουμε ότι τα πολύγωνα αυτά είναι όμοια

> Υπενθύμιση: Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν έχουν _________________________________.

Απόδειξη:

> Η απόδειξη είναι προαιρετική. Απαραίτητη είναι η γνώση και κατανόηση των συμπερασμάτων. Δεν προτείνονται βήματα για αυτήν, καθώς γίνεται επιβεβαίωση του ορισμού μέσα από απλά συμπεράσματα. Το προηγούμενο είναι ταυτόχρονα η μόνη υπόδειξη.

Άρα, $\boxed{\text{Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.}}$

Άσκηση:
Τα πλήθη $ν_1$, $ν_2$ των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων $ν^3 - 3ν^2 - 7ν - 15 = 0$ και $2ν - 9 = \sqrt{ν - 4}$. Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια [□σ.237-Εμπ.4].

□ Μεταξύ δύο κανονικών ν-γώνων ισχύει $\boxed{\frac{λ_ν}{λ'_ν} = \frac{R}{R'} = \frac{α_ν}{α'_ν}}$.

Δηλαδή: Σε δύο κανονικά πολύγωνα, ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος με τον λόγο των ακτινών τους και τον λόγο των αποστημάτων τους.
Η απόδειξη παραλείπεται και δεν ζητείται.
Γενικότερα ισχύει: Στα όμοια πολύγωνα, ο λόγος οποιωνδήποτε ομόλογων στοιχείων τους μήκους είναι σταθερός και ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους (θυμηθείτε ότι για τα εμβαδά δεν ισχύει κάτι τέτοιο □σ.222-Θεώρ.ΙΙ). Τέτοια στοιχεία είναι, εκτός από αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, η περίμετρός τους, η περίμετρος του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου τους, οι διαγώνιοί τους.

Ασκήσεις:
1. Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι λ = 2. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων τους, των ακτινών τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους; [□σ.237-Εμπ.3]

2. Αν $λ_ν{}'$ είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και $λ_ν$, $α_ν$ η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο (ακτίνας R), να αποδείξετε ότι $R \cdot λ_ν = α_ν \cdot λ_ν{}'$. [□σ.237-Απ.5]
   Λύση:
   □ Στο σχέδιο «Γενικά», τσεκάρετε τις επιλογές «εγγεγραμμένος κύκλος», «Κέντρο Ο», «Απόστημα $α_ν$», «Μ μέσο ΑΒ», «ν-γωνο εσωτερικά (ακτίνας $α_ν$)».

□ Το τμήμα ΟΜ είναι ________________ για το πολύγωνο που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο, ενώ ταυτόχρονα είναι ____________________ για το πολύγωνο που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο. Άρα ισχύει ______________.

□ Επιπλέον, τα δύο πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών. Άρα, από προηγουμένως, ισχύει $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$.

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων μας δίνει το ζητούμενο.

Ασκήσεις προς λύση από το σχολικό βιβλίο:
Σελίδα 237: Κατανόησης 1, 2, 3, 4, 5, Εμπέδωσης 1, 2, 5, 6, 7, Αποδεικτικές 3.

8 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να βρούμε ορισμένα από τα στοιχεία τριών κανονικών πολυγώνων, του **ισόπλευρου τριγώνου**, του **τετραγώνου** και του **κανονικού εξαγώνου**, ως συνάρτηση της ακτίνας τους **R**. Τα στοιχεία που ψάχνουμε είναι η γωνία $\boldsymbol{\phi_\nu}$, η κεντρική γωνία $\boldsymbol{\omega_\nu}$, η πλευρά $\boldsymbol{\lambda_\nu}$ και το απόστημα $\boldsymbol{\alpha_\nu}$, η περίμετρος $\mathbf{P_\nu}$ και το εμβαδόν $\mathbf{E_\nu}$.

> Τα δύο πρώτα στοιχεία που αναφέρθηκαν (η γωνία ϕ_ν και η κεντρική γωνία ω_ν) θα προκύψουν ανεξάρτητα από την ακτίνα R.
> Στα πλαίσια της ύλης του σχολικού βιβλίου ζητούνται μόνο η πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν. Τα υπόλοιπα στοιχεία ζητούνται εδώ ως άσκηση.
> Επίσης, οι αποδείξεις που προτείνονται για το σκοπό αυτό είναι σε κάποιες περιπτώσεις διαφορετικές από αυτές του βιβλίου. Μπορείτε να υιοθετήσετε οποιαδήποτε απόδειξη.

Τα βήματα που προτείνονται παρακάτω βρίσκουν εφαρμογή και στα τρία κανονικά πολύγωνα, οπότε αναφέρονται μία φορά και εσείς θα τα εφαρμόσετε τρεις, μία για κάθε πολύγωνο. Στο τέλος θα συγκεντρώσετε τα αποτελέσματά σας στον πίνακα που ακολουθεί.

□ Από τον τύπο _____________ προκύπτει ω_ =

□ Από τον τύπο _____________ προκύπτει φ_ =

□ 🖵 Στο σχέδιο «Γενικά», ορίστε την τιμή του ν για το πολύγωνο στο οποίο θα εργαστείτε (3, 4 ή 6) και τσεκάρετε της επιλογές «Κορυφές Α,Β», «Περιγεγραμμένος κύκλος», «Κέντρο Ο», «Ακτίνα R», «Μ μέσο ΑΒ», «τρίγωνο ΟΜΒ» και Μέτρα «Γωνιών».
Το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ___________ και ____________ άρα _______________________.

Από το παραπάνω προκύπτει ότι ____.

Με τη βοήθεια της σχέσης ____________ προκύπτει ότι _________________________

____, άρα λ_ = και α_ = .

□ Από τον τύπο _____________ προκύπτει P_ =

□ Από τον τύπο _____________ προκύπτει E_ =

Πολύγωνο	Γωνία ϕ_ν	Κεντρ. γ. ω_ν	Πλευρά λ_ν	Απόστημα α_ν	Περίμετρος P_ν	Εμβαδόν E_ν
Τρίγωνο	$\phi_3 =$					
Τετράγωνο						
Εξάγωνο						

Ασκήσεις:

1. Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο,R) ώστε $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = \lambda_{12}$ και $\Gamma\Delta = R$, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου[σ.241-Κατ.2].

   Λύση:

   Είναι $AB = R\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = \lambda_4 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \omega_4 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 90^\circ$,

   όμοια $B\Gamma = \lambda_{12} \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = \underline{\quad} \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = \frac{\quad}{\quad} \Leftrightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = \underline{\quad}^\circ$

   και $\Gamma\Delta = \underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

   Άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\underline{\quad}} + \overset{\frown}{\underline{\quad}} + \overset{\frown}{\underline{\quad}} = \underline{\quad\ }^\circ + \underline{\quad\ }^\circ + \underline{\quad\ }^\circ = \underline{\quad\ }^\circ$,

   άρα είναι διάμετρος του κύκλου.

2. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 10 cm και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν [σ.242-Εμπ.2].

   Λύση:

   Παρατηρούμε ότι $\frac{\alpha_\nu}{R} = \frac{\quad}{\quad}$, άρα α_ν = ___R, άρα ν = ___.

   Έτσι, λ_ν = λ_ = __R = _________ και E_ν = Ε_ = __________________.

   Το μήκος της πλευράς λ_ν θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τον τύπο $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, όμως για τον υπολογισμό του εμβαδού E_ν ήταν απαραίτητη η εύρεση του ν.

3. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) [σ.242-Απ.3].

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Αρχιμήδη.

4. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του [σ.242-Απ.4].

Ασκήσεις προς λύση από το σχολικό βιβλίο:
Σελίδα 241-242: Κατανόησης 1, 3, 4, Εμπέδωσης 3, 4, Αποδεικτικές 1, 2, Σύνθετα 2.